

## 2 Gli agenti economici

### 2.1 L'utilità

Si suppone che nella nostra economia l'utilità possa derivare dal consumo o dalla ricchezza. In ognuno dei due casi, comunque, deve valere quanto segue.

**Definizione 2.1 Funzione di utilità:** una qualsiasi funzione  $U(x)$  concava, non decrescente (superiormente semi)continua tale che:

1) la derivata prima è continua, positiva e strettamente decrescente (questo ci serve per poter invertire l'utilità marginale ma anche per avere una funzione obiettivo concava e, dunque, un ottimo interno);

2) quando l'argomento tende a infinito la derivata prima deve annullarsi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0;$$

3) esiste un valore  $\hat{x}$ , detto di sussistenza, tale che

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{\partial U(x)}{\partial x} = \infty.$$

L'ultima condizione sulla funzione di utilità consente di concludere che il consumo o la ricchezza ottimi non saranno mai inferiori al loro livello di sussistenza. Quando, infatti, la ricchezza raggiunge il livello di sussistenza, l'utilità marginale tende a infinito e diviene conveniente spostarsi su un livello più elevato di ricchezza (basta investire tutto nel titolo privo di rischio) per avere un incremento infinito nel livello dell'utilità.

### 2.2 La massimizzazione dell'utilità

Il problema che deve risolvere un agente economico si può scrivere come

$$\max_{\theta, s, c} \mathbb{E}_{t_0} \left[ \int_{t_0}^T v(t_0, t) U_1(c) dt + v(t_0, T) U_2(R) \right], \quad (15)$$

dove  $v(t_0, t)$  è un fattore di sconto,  $\theta_S$  è il portafoglio di titoli rischiosi<sup>1</sup> e  $c$  è il consumo (istantaneo). Le due funzioni  $U_1$  e  $U_2$  sono funzioni di utilità potenzialmente diverse.

La ricchezza  $R$  si evolve come

$$dR = (Rr + \theta'_S I_S (\mu - r\mathbf{1}) - c) dt + \theta'_S I_S \Sigma' dW.$$

In alcuni articolo anziché il numero ottimo di titoli da detenere in portafoglio si calcola la quota ottima di ricchezza da investire in ogni titolo. Essa è data da

$$w'_S \equiv \frac{1}{R} \theta'_S I_S,$$

e dunque l'equazione differenziale della ricchezza si può scrivere come

$$\frac{dR}{R} = (r + w'_S (\mu - r\mathbf{1}) - c) dt + w'_S \Sigma' dW,$$

che è tipograficamente più snella ma, nella sostanza, identica alla precedente. Quale dei due modelli utilizzare è semplicemente una questione di gusto personale e si osserverà più avanti come il risultato finale sia, poi, identico.

Per gestire il problema di massimo (15) vi sono due vie principali. Una è quella suggerita da Bellman per la programmazione dinamica e l'altra è derivata dall'idea di trasformare il massimo dinamico in un massimo statico. Le vediamo entrambe.

Al fine di facilitare l'esposizione, tuttavia, mi disinteresso del problema del consumo e cerco l'ottimo per un soggetto che desidera, semplicemente, massimizzare l'utilità attesa della sua ricchezza finale.

Il problema, in questa forma, diventa, allora

$$\begin{aligned} \max_{\theta_S} \mathbb{E}_{t_0} [v(t_0, T) U_2(R)] & \quad (16) \\ dR & = (Rr + \theta'_S I_S (\mu - r\mathbf{1})) dt + \theta'_S I_S \Sigma' dW. \end{aligned}$$

### 2.3 L'approccio di Bellman

L'approccio di Bellman consiste nel definire la funzione valore (o funzione di utilità indiretta) al tempo  $t$  come

$$J(t, \bullet) = \max_{\theta_S, c} \mathbb{E}_t \left[ \int_t^T v(t_0, s) U_1(c) ds + v(t_0, T) U_2(R) \right].$$

---

<sup>1</sup>L'ammontare di denaro da investire nel titolo privo di rischio è calcolato, una volta ottenuto il valore ottimo di  $\theta_S$ , dalla (6).

Il passaggio successivo è quello di riscrivere  $J(t, \bullet)$  in termini di se stessa come segue:

$$\begin{aligned}
& J(t, \bullet) \\
&= \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_t \left[ \int_t^{t+dt} v(t_0, s) U_1(c) ds + \int_{t+dt}^T v(t_0, s) U_1(c) ds + v(t_0, T) U_2(R) \right] \\
&= \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_t \left[ \int_t^{t+dt} v(t_0, s) U_1(c) ds \right] + \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_t \left[ \int_{t+dt}^T v(t_0, s) U_1(c) ds + v(t_0, T) U_2(R) \right] \\
&= \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_t \left[ \int_t^{t+dt} v(t_0, s) U_1(c) ds \right] + J(t+dt, \bullet).
\end{aligned}$$

Riarrangiando i termini e dividendo per  $dt$  si ottiene

$$0 = \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_t \left[ \frac{1}{dt} \int_t^{t+dt} v(t_0, s) U_1(c) ds \right] + \frac{J(t+dt, \bullet) - J(t, \bullet)}{dt}.$$

Non resta che far tendere  $dt$  a zero in modo da avere

$$0 = \max_{\theta_{S,c}} [v(t_0, t) U_1(c)] + \mathcal{A}J(t, \bullet),$$

dove con l'operatore  $\mathcal{A}$  si è indicata la derivata ma nel senso di Itô, poiché  $J$  contiene la variabile aleatoria  $R$ . Quella che si è ottenuta è una equazione differenziale che, per essere ben definita, necessita di una condizione al contorno. Condizione che è piuttosto naturale scrivere nella seguente forma

$$\begin{aligned}
J(T, \bullet) &= \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_T \left[ \int_T^T v(t_0, s) U_1(c) ds + v(t_0, T) U_2(R) \right] \\
&= \max_{\theta_{S,c}} \mathbb{E}_T [v(t_0, T) U_2(R)] = v(t_0, T) U_2(R).
\end{aligned}$$

Si può allora scrivere

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\theta_{S,c}} [v(t_0, t) U_1(c)] \\
&\quad + J_t + J_R (Rr + \theta_S^* I_S (\mu - r\mathbf{1}) - c^*) + \frac{1}{2} J_{RR} \theta_S'^* I_S \Sigma' \Sigma I_S \theta_S^*,
\end{aligned}$$

dove, per semplicità, ho indicato le derivate parziali di  $J$  con un pedice e dove  $\theta_S^*$  e  $c^*$  sono il portafoglio e il consumo ottimii. In alternativa si può scrivere

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\theta_{S,c}} [v(t_0, t) U_1(c)] \\
&\quad + \max_{\theta_{S,c}} \left[ J_t + J_R (Rr + \theta_S' I_S (\mu - r\mathbf{1}) - c) + \frac{1}{2} J_{RR} \theta_S' I_S \Sigma' \Sigma I_S \theta_S \right].
\end{aligned}$$

La condizione del primo ordine per un massimo nel consumo e nel portafoglio è

$$\begin{aligned} v(t_0, t) \frac{\partial U_1(c^*)}{\partial c^*} - J_R &= 0, \\ J_R I_S (\mu - r\mathbf{1}) + J_{RR} I_S \Sigma' \Sigma I_S \theta_S^* &= 0, \end{aligned}$$

da cui

$$c^* = U_1'^{-1} \left( \frac{J_R}{v(t_0, t)} \right), \quad (17)$$

$$I_S \theta_S^* = -\frac{J_R}{J_{RR}} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}). \quad (18)$$

Le condizioni del secondo ordine, invece sono

$$\begin{aligned} v(t_0, t) \frac{\partial^2 U_1(c^*)}{\partial c^{*2}} &< 0, \\ J_{RR} I_S \Sigma' \Sigma I_S &< 0, \end{aligned}$$

dove la seconda disequazione deve leggerisi come «definita negativa» visto che al primo membro si trova una matrice. Poiché  $v(t_0, t)$  è sempre un numero positivo e  $\Sigma' \Sigma$  è una forma quadratica (dunque sempre definita positiva), allora il problema di massimo è ben definito per una qualsiasi funzione  $U_1$  concava e per una funzione valore  $J$  concava nella ricchezza.

Si può dimostrare, con passaggi decisamente poco gradevoli da riportare qui, che la funzione valore  $J$  «eredita», in qualche modo, la concavità di  $U_2$  e, dunque, la condizione del secondo ordine per il portafoglio è, anche essa, rispettata.

**N. B. 2.1** *Le soluzioni  $c^*$  e  $\theta_S^*$  appena presentate sono «finte» poiché, contenendo la funzione valore  $J$ , che deve essere ancora calcolata, non sono di alcuna utilità pratica.*

Sostituendo il consumo e il portafoglio ottimi nell'equazione differenziale per  $J$  si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= v(t_0, t) U_1 \left( U_1'^{-1} \left( \frac{J_R}{v(t_0, t)} \right) \right) - J_R U_1'^{-1} \left( \frac{J_R}{v(t_0, t)} \right) \\ &+ J_t + J_R R r - \frac{1}{2} \frac{J_R^2}{J_{RR}} (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}), \end{aligned} \quad (19)$$

con la condizione al contorno

$$J(T, R) = v(t_0, T) U_2(R).$$

Questa è la cosiddetta **equazione differenziale di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)**. Risolvere una simile equazione differenziale che, in genere, è

altamente non lineare, è il momento più complesso della programmazione lineare di Bellman.

Se il soggetto studiato non è interessato a sottrarre ricchezza al suo portafoglio per consumare, l'equazione HJB diventa

$$0 = J_t + J_R Rr - \frac{1}{2} \frac{J_R^2}{J_{RR}} (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}),$$

con la stessa condizione al contorno.

## 2.4 Una soluzione in forma chiusa

I calcoli possono condurre a una soluzione in forma chiusa per la funzione valore  $J$  solo nel caso in cui la funzione di utilità appartenga alla famiglia delle funzioni HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) ovvero sia della forma

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{1}{\gamma - \beta} + \frac{1}{\gamma - \beta} (\alpha + \gamma x)^{1 - \frac{\beta}{\gamma}}, \\ \beta &> 0, \\ \alpha + \gamma x &> 0. \end{aligned}$$

Il procedimento è quello di usare la cosiddetta **funzione di prova** o **guess function**. Purtroppo non esiste un metodo preciso per ricavare una funzione di prova ed occorre affidarsi all'intuizione ricordando, tuttavia, che la funzione di prova dovrebbe ereditare, in qualche modo, la forma funzionale della funzione di utilità (visto che, al contorno, le due funzioni devono coincidere).

Per semplificare al massimo i conti utilizzo, nella soluzione che qui presento, la funzione di utilità (solo sulla ricchezza finale) nella forma

$$U(R) = \frac{(R - \alpha)^{1 - \delta}}{1 - \delta},$$

dove si nota che vengono rispettate le condizioni di Inada ed esiste, inoltre, un livello della ricchezza (dato da  $\alpha$ ) in cui l'utilità marginale tende a infinito. Questo ci garantisce che la ricchezza non scenderà mai sotto al livello di  $\alpha$  (in molte applicazioni si pone  $\alpha = 0$ ).

**N. B. 2.2** Nella funzione di utilità appena presentata  $\alpha$  viene chiamato anche **livello di sussistenza** della ricchezza.

Nel caso di questa utilità HARA, la funzione di prova è la seguente

$$J(R, t) = F(t) \frac{(R + H(t))^{1 - \delta}}{1 - \delta},$$

con la condizione al contorno

$$J(R, T) = \frac{1}{1-\delta} (R - \alpha)^{1-\delta}.$$

Derivando la  $J(R, t)$  rispetto a  $R$  e a  $t$  si ha

$$\begin{aligned} J_t &= F_t \frac{(R + H(t))^{1-\delta}}{1-\delta} + F(R + H(t))^{-\delta} H_t, \\ J_R &= F(R + H(t))^{-\delta}, \\ J_{RR} &= F(-\delta) (R + H(t))^{-\delta-1}. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione HJB si ha

$$\begin{aligned} 0 &= F_t \frac{(R + H(t))^{1-\delta}}{1-\delta} + F(R + H(t))^{-\delta} H_t \\ &\quad + F(R + H(t))^{-\delta} Rr \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{F(R + H(t))^{1-\delta}}{\delta} (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}). \end{aligned}$$

Poiché il termine  $(R + H(t))^{-\delta} R$  si può scrivere come

$$\begin{aligned} &(R + H(t))^{-\delta} R \\ &= (R + H(t))^{1-\delta} - (R + H(t))^{-\delta} H, \end{aligned}$$

allora possiamo isolare i termini che contengono  $(R + H(t))^{-\delta}$  e  $(R + H(t))^{1-\delta}$  in modo da avere

$$\begin{aligned} 0 &= (R + H(t))^{1-\delta} \left( F_t \frac{1}{1-\delta} + Fr + \frac{1}{2} F \frac{1}{\delta} (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) \right) \\ &\quad + (R + H(t))^{-\delta} F(H_t - Hr). \end{aligned}$$

Per la proprietà di uguaglianza dei polinomi, allora, si hanno due equazioni differenziali

$$\begin{aligned} 0 &= F_t + (1-\delta) F \left( r + \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) \right), \\ 0 &= H_t - Hr, \end{aligned}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} F(T) &= 1, \\ H(T) &= -\alpha. \end{aligned}$$

Sostituendo la funzione di prova nella (18) si ha

$$I_S \theta_S^* = \frac{\gamma R + H(t)}{\beta} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}),$$

dove si nota che rileva soltanto la funzione  $H$  la quale ha soluzione

$$H(t) = -\alpha e^{-\int_t^T r(s)ds},$$

avendo così

$$I_S \theta_S^* = \frac{R(t) - \alpha e^{-\int_t^T r(s)ds}}{\delta} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}).$$

Si nota quanto segue:

1. la ricchezza che rileva per il calcolo del portafoglio ottimo è quella data dalla ricchezza nominale, ad ogni istante, diminuita del valore attuale della ricchezza di sussistenza che si vuole avere alla fine del periodo di gestione del portafoglio (in  $T$ );
2. se il vettore  $(\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1})$  contiene elementi positivi, allora l'investimento in titoli rischiosi è una funzione crescente dell'orizzonte temporale

$$\frac{\partial I_S \theta_S^*}{\partial T} = r(T) \frac{\alpha e^{-\int_t^T r(s)ds}}{\delta} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1});$$

questo conferma l'idea per cui soggetti con orizzonte temporale più lungo devono investire quote di ricchezza maggiori nei titoli rischiosi;

3. l'investimento in titoli rischiosi è inversamente correlato all'indice di avversione relativa al rischio  $\delta$ . Un soggetto infinitamente avverso al rischio ( $\delta \rightarrow \infty$ ) non investe in titoli rischiosi;
4. quando  $\alpha = 0$  (cioè non esiste un livello strettamente positivo di sussistenza per la ricchezza finale), allora il portafoglio ottimo non dipende dall'orizzonte temporale.

**N. B. 2.3** *In questa trattazione non si è mai utilizzata l'ipotesi di completezza del mercato!!*

Cerchiamo di capire perché non è stata necessaria l'ipotesi di completezza attraverso un esempio.

**Esempio 2.1** *Sia dato il mercato*

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{G(t)} &= r(t) dt, \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu(t, S) dt + \sigma_1(t, S) dW_1 + \sigma_2(t, S) dW_2. \end{aligned}$$

Questo mercato è palesemente incompleto visto che l'equazione

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \mu - r,$$

ha infinite soluzioni. Tuttavia il mercato precedente non è statisticamente riconoscibile rispetto al mercato

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{G(t)} &= r(t) dt, \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu(t, S) dt + \sqrt{\sigma_1(t, S)^2 + \sigma_2(t, S)^2} dW_3, \end{aligned}$$

con  $dW_3$  indipendente da  $dW_1$  e  $dW_2$ . La media e la varianza di  $\frac{dS}{S}$ , infatti, sono le stesse rispetto al primo caso. Ecco, allora, che l'incompletezza del mercato, in questo caso, non ci ha creato problemi perché il mercato incompleto non era statisticamente diverso da un mercato completo.

## 2.5 L'approccio della martingala

L'idea alla base di questo approccio è quella di trasformare una massimizzazione dinamica in una massimizzazione statica. Vediamo come.

Il problema rimane il (16) ma il vincolo (8), anziché rimanere scritto in forma differenziale, viene scritto utilizzando la probabilità di martingala equivalente (per questo motivo il metodo è detto «della martingala»).

Prendiamo l'equazione (8) e riscriviamola sotto la probabilità  $\mathbb{Q}$  usando la (12):

$$\begin{aligned} dR &= (Rr + \theta'_S I_S (\mu - r\mathbf{1})) dt + \theta'_S I_S \Sigma' dW \\ &= (Rr + \theta'_S I_S (\mu - r\mathbf{1})) dt + \theta'_S I_S \Sigma' (dW^{\mathbb{Q}} - \xi dt) \\ &= (Rr + \theta'_S I_S (\mu - r\mathbf{1} - \Sigma' \xi)) dt + \theta'_S I_S \Sigma' dW^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Ricordando la (9) si ha

$$dR = Rr dt + \theta'_S I_S \Sigma' dW^{\mathbb{Q}},$$

la quale, in valore atteso, ha evidentemente soluzione

$$R(t_0) = \mathbb{E}_{t_0}^{\mathbb{Q}} \left[ R(T) \frac{G(t_0)}{G(T)} \right],$$

ovvero, sotto la probabilità di martingala equivalente, la ricchezza iniziale deve essere pari a tutto il consumo scontato ad oggi e alla ricchezza che si vuole avere alla fine del periodo (in  $T$ ) anch'essa scontata a oggi.

Il principio è quello che non si può creare qualcosa dal nulla. Se voglio finanziare un certo flusso di consumo e avere, alla fine, un certo ammontare di ricchezza devo, già oggi, possedere il valore attuale di tutti questi flussi di cassa.

Il problema di massimo si può allora scrivere come

$$\begin{aligned} & \max_{R(T)} \mathbb{E}_{t_0} [v(t_0, T) U_2(R(T))], \\ R(t_0) &= \mathbb{E}_{t_0}^{\mathbb{Q}} \left[ R(T) \frac{G(t_0)}{G(T)} \right], \end{aligned}$$

dove si continua a massimizzare rispetto al consumo ma l'altra variabile di controllo è diventata la ricchezza al tempo finale  $R(T)$ . Si troverà tale ricchezza ottima e il portafoglio ottimo sarà, semplicemente, quello che replica la ricchezza ottima.

Il problema così scritto si può risolvere con il metodo di Lagrange

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_{t_0} [v(t_0, T) U_2(R(T))] + \lambda \left( R(t_0) - \mathbb{E}_{t_0}^{\mathbb{Q}} \left[ R(T) \frac{G(t_0)}{G(T)} \right] \right),$$

dove  $\lambda$  è il consueto moltiplicatore di Lagrange.

Sappiamo già che il valore atteso sotto la probabilità  $\mathbb{Q}$  si può riscrivere sotto la probabilità  $\mathbb{P}$  usando il fattore di sconto stocastico (cfr. (14)). Si può così scrivere

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_{t_0} [v(t_0, T) U_2(R(T))] + \lambda \left( R(t_0) - \mathbb{E}_{t_0} \left[ R(T) \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right] \right),$$

da cui si ricava la condizione del primo ordine

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R(T)} \right|_{R(T)=R(T)^*} = \mathbb{E}_{t_0} \left[ v(t_0, T) \frac{\partial U_2(R(T)^*)}{\partial R(T)^*} \right] - \lambda \mathbb{E}_{t_0} \left[ \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right] = 0.$$

Faccio notare che la condizione del secondo ordine, questa volta, non riguarda la funzione valore ma richiede, semplicemente, che  $U_2$  sia concava. Poiché il massimo deve valere per ogni stato del mondo, si ha

$$R(T)^* = U_2'^{-1} \left( \lambda \frac{G(t_0)}{G(T)} \frac{m(t_0, T)}{v(t_0, T)} \right),$$

e dal vincolo si ottiene

$$R(t_0) = \mathbb{E}_{t_0}^{\mathbb{Q}} \left[ U_2'^{-1} \left( \lambda \frac{G(t_0)}{G(T)} \frac{m(t_0, T)}{v(t_0, T)} \right) \frac{G(t_0)}{G(T)} \right],$$

da cui, conosciuta la forma funzionale di  $U_2$  si ricaverà il valore di  $\lambda$ .

Sapendo che deve valere

$$R(t)^* = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ R(T)^* \frac{G(t)}{G(T)} \right],$$

per qualsiasi istante  $t$  allora si ha

$$R(t)^* = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ U_2'^{-1} \left( \lambda \frac{G(t_0)}{G(T)} \frac{m(t_0, T)}{v(t_0, T)} \right) \frac{G(t)}{G(T)} \right],$$

all'interno della quale l'unica variabile aleatoria è il fattore di sconto stocastico. Si potrà allora scrivere, usando il lemma di Itô

$$dR(t)^* = R^*(t) r dt + \frac{\partial R^*(t)}{\partial m(t_0, t)} m(t_0, t) \xi' dW^{\mathbb{Q}}.$$

Abbiamo già posto, nel vincolo del problema, che sia  $R(t_0)^* = R(t_0)$  e non ci resta, allora, che uguagliare i termini di deriva di  $R(t)^*$  e di  $R(t)$  avendo

$$\theta'_S I_S \Sigma' = \frac{\partial R^*(t)}{\partial m(t_0, t)} m(t_0, t) \xi',$$

da cui, se  $\Sigma'$  è invertibile (cioè se il mercato è completo)

$$I_S \theta_S = \frac{\partial R^*(t)}{\partial m(t_0, t)} m(t_0, t) \Sigma^{-1} \xi.$$

**N. B. 2.4** *Per calcolare il portafoglio ottimo con il metodo della martingala si è usata l'ipotesi di completezza del mercato!!*

## 2.6 L'equilibrio economico generale (con consumo)

Per studiare il caso di un equilibrio economico generale occorre identificare ciò che è un dato dell'economia e ciò che, invece, verrà definito in equilibrio. I dati dell'economia sono i seguenti:

1. il numero ( $I$ ) di agenti;
2. il numero di titoli ( $n$ ) scambiati nell'economia che seguono i processi

$$I_S^{-1} dS = \mu dt + \Sigma' dW,$$

3. l'utilità dei singoli agenti sul consumo e sulla ricchezza finale (con il loro fattore di sconto soggettivo)

$$e^{-\rho t} U_i(c_i),$$

con il fattore di sconto supposto costante per tutti gli agenti (non è difficile estendere il caso a  $\rho$  diverso per tutti gli agenti ma la qualità del risultato non ne viene alterata, complicandosi solo i conti);

4. le dotazioni ( $E$ ) di ogni singolo agente che si evolve in modo stocastico

$$\frac{dE_i(t)}{E_i(t)} = \mu_{E,i} dt + \sigma'_{E,i} dW,$$

dove  $\mu_{E,i}$  e  $\sigma_{E,i}$  sono un dato del sistema. Ogni agente, quindi, viene fornito di una dotazione nuova istante per istante. L'equilibrio del sistema richiede che valga

$$\sum_{i=1}^I E_i(t) = \sum_{i=1}^I c_i(t),$$

visto che le dotazione si suppone non possano essere risparmiate nel tempo. Faccio notare che chiamando  $\hat{E}$  la somma di tutti gli  $E_i$  si ottiene

$$\begin{aligned} d\hat{E} &= \sum_{i=1}^I dE_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^I E_i(t) \mu_{E,i} dt + \sum_{i=1}^I E_i(t) \sigma'_{E,i} dW, \end{aligned}$$

da cui si può scrivere

$$\frac{d\hat{E}}{\hat{E}} = \hat{\mu}_E dt + \hat{\sigma}'_E dW, \quad (20)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_E &\equiv \sum_{i=1}^I \frac{E_i(t) \mu_{E,i}}{\hat{E}}, \\ \hat{\sigma}'_E &\equiv \sum_{i=1}^I \frac{E_i(t) \sigma'_{E,i}}{\hat{E}}. \end{aligned}$$

L'interagire degli agenti economici stabilirà:

1. il rendimento medio dei titoli sul mercato;
2. la volatilità dei titoli sul mercato;
3. il tasso privo di rischio.

Il problema del singolo agente è (metodo della martingala)

$$\begin{aligned} &\max \mathbb{E}_{t_0} \left[ \int_{t_0}^T e^{-\rho(t-t_0)} U_i(c_i(t)) dt \right] \\ R(t_0) &= \mathbb{E}_{t_0} \left[ \int_{t_0}^T c(t) \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) dt \right] \end{aligned}$$

da cui la condizione del primo ordine è

$$c_i^*(t) = U_i'^{-1} \left( \lambda_i \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) e^{\rho(t-t_0)} \right).$$

In equilibrio, allora, deve valere

$$\sum_{i=1}^I E_i(t) = \sum_{i=1}^I U_i'^{-1} \left( \lambda_i \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) e^{\rho(t-t_0)} \right).$$

Se introduce la funzione  $U(x)$  tale che

$$U'^{-1}(x) = \sum_{i=1}^I U_i'^{-1}(\lambda_i x),$$

e chiamiamo  $\hat{c}$  il consumo aggregato, allora la condizione di equilibrio diviene

$$\hat{c}(t) = U'^{-1} \left( \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) e^{\rho(t-t_0)} \right). \quad (21)$$

**N. B. 2.5** Si può dimostrare che  $U'^{-1}$  è, in effetti, l'inversa della derivata di una funzione  $U$  che può essere interpretata come l'utilità dell'agente rappresentativo. La dimostrazione si basa sulla soluzione del seguente problema

$$\begin{aligned} U(\hat{c}) &\equiv \max_{c_i} \sum_{i=1}^I \frac{1}{\lambda_i} U_i(c_i) \\ \hat{c} &= \sum_{i=1}^I c_i \end{aligned}$$

Ricordando la condizione di equilibrio che richiede che la somma delle dotazioni (chiamiamola  $\hat{E}$ ) sia uguale alla somma dei consumi (che abbiamo chiamato  $\hat{c}$ ) si può riscrivere la (21) come

$$U'(\hat{E}(t)) = \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) e^{\rho(t-t_0)},$$

il cui differenziale (usando Itô e ricordando (1) e (14)) è

$$\begin{aligned} dU'(\hat{E}(t)) &= \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) e^{\rho(t-t_0)} (\rho - r(t)) dt \\ &\quad - \frac{G(t_0)}{G(t)} m(t_0, t) e^{\rho(t-t_0)} \xi' dW, \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{dU'(\hat{E}(t))}{U'(\hat{E}(t))} = (\rho - r(t)) dt - \xi' dW,$$

Si può anche applicare Itô a  $U'(\hat{E}(t))$  data la (20) e, in questo caso, si otterrebbe

$$\begin{aligned} dU'(\hat{E}(t)) &= \left( U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t) \hat{\mu}_E + \frac{1}{2} U'''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t)^2 \hat{\sigma}'_E \hat{\sigma}_E \right) dt \\ &\quad + U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t) \hat{\sigma}'_E dW. \end{aligned}$$

Poiché le ultime due equazioni, che descrivono entrambe  $dU'(\hat{E}(t))$ , devono coincidere, allora i termini di deriva e di diffusione devono coincidere:

$$\begin{aligned} U'(\hat{E}(t))(\rho - r(t)) &= U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t) \hat{\mu}_E + \frac{1}{2} U'''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t)^2 \hat{\sigma}'_E \hat{\sigma}_E, \\ -U'(\hat{E}(t)) \xi' &= U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t) \hat{\sigma}'_E, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} r(t) &= \rho - \frac{U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t)}{U'(\hat{E}(t))} \hat{\mu}_E - \frac{1}{2} \frac{U'''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t)^2}{U'(\hat{E}(t))} \hat{\sigma}'_E \hat{\sigma}_E, \\ \xi' &= -\frac{U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t)}{U'(\hat{E}(t))} \hat{\sigma}'_E. \end{aligned}$$

Ricordando la (9) e postmultiplicando la seconda equazione per  $\Sigma$  si ottiene

$$\mu - r(t) \mathbf{1} = -\frac{U''(\hat{E}(t)) \hat{E}(t)}{U'(\hat{E}(t))} \hat{\sigma}'_E \Sigma,$$

che è il cosiddetto **CCAPM – Consumption-base Capital Asset Pricing Model**.

Commenti:

1. in equilibrio il tasso di interesse privo di rischio  $r$  e il prezzo di mercato del rischio  $\xi$  sono univocamente determinati dai dati dell'economia (dotazioni  $\hat{E}$ , utilità e fattore di sconto personale  $\rho$ );
2. in equilibrio il rendimento ( $\mu$ ) e la volatilità ( $\Sigma$ ) dei titoli rischiosi non sono univocamente determinati poiché si trova, semplicemente, una relazione che li deve legare;
3. in equilibrio il prezzo di mercato del rischio è dato dal prodotto tra la volatilità delle dotazioni e l'indice di avversione relativa al rischio di Arrow-Pratt calcolato sulla funzione di utilità dell'agente rappresentativo.

## 2.7 L'equilibrio economico generale (senza consumo)

Nel caso in cui non ci sia il problema del consumo, ogni agente risolve il problema (metodo della martingala)

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}_{t_0} \left[ e^{-\rho(T-t_0)} U_i (R_i (T)) \right] \\ R_i (t_0) &= \mathbb{E}_{t_0} \left[ R_i (T) \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right] \end{aligned}$$

che, se  $\rho$  non è correlato con  $R$  si semplifica in

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}_{t_0} [U_i (R_i (T))] \\ R_i (t_0) &= \mathbb{E}_{t_0} \left[ R_i (T) \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right] \end{aligned}$$

da cui si ha la condizione del primo ordine su  $R(T)$

$$R_i^* (T) = U_i'^{-1} \left( \lambda_i \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right),$$

dove  $\lambda_i$  è il moltiplicatore di Lagrange.

Poiché questo deve valere per ogni istante si ha

$$\begin{aligned} R_i^* (t) &= \mathbb{E}_t \left[ R_i^* (T) \frac{G(t)}{G(T)} m(t, T) \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[ U_i'^{-1} \left( \lambda_i \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right) \frac{G(t)}{G(T)} m(t, T) \right]. \end{aligned}$$

In questo caso la condizione di equilibrio è che la ricchezza totale, in qualsiasi momento, sia uguale alla somma del valore dei titoli scambiati sul mercato:

$$\sum_{i=1}^I R_i^* (t) = \sum_{j=1}^n S_j (t),$$

$$\mathbb{E}_t \left[ \frac{G(t)}{G(T)} m(t, T) \sum_{i=1}^I U_i'^{-1} \left( \lambda_i \frac{G(t_0)}{G(T)} m(t_0, T) \right) \right] = \sum_{j=1}^n S_j (t)$$

anche in questo caso prendiamo la funzione  $U'^{-1}$  come somma dell  $U_i'^{-1}$  avendo

$$\mathbb{E}_t \left[ \frac{G(t)}{G(T)} m(t, T) U'^{-1} (\hat{R}) \right] = \sum_{j=1}^n S_j (t)$$

## 2.8 Il caso con le variabili di stato

Si è fin qui analizzato il caso di una massimizzazione dell'utilità attesa (del consumo e) della ricchezza nel caso in cui le uniche variabili aleatorie siano i prezzi dei titoli rischiosi.

Sappiamo bene, tuttavia, che sul mercato esistono molte altre variabili aleatorie tra cui rivestono un ruolo fondamentale:

1. i tassi di interesse;
2. i tassi di cambio;
3. l'inflazione;
4. le volatilità dei titoli.

L'approccio più comune per studiare questi casi è quello di definire un vettore  $z \in \mathbb{R}^{s \times 1}$  che contenga tutte le possibili variabili aleatorie che influenzano i prezzi dei titoli sul mercato. Si ipotizza che i valori di  $z$  seguano il processo

$$dz = \mu_z dt + \Omega' dW, \quad (22)$$

e, dunque, i prezzi dei titoli sono dati da

$$\begin{aligned} \frac{dG}{G} &= r(t, z) dt, \\ I_S^{-1} dS &= \mu(t, z) dt + \Sigma(t, z)' dW. \end{aligned}$$

A questo punto diventa fondamentale capire quali variabili di stato del vettore  $z$  possono essere replicate con i titoli sul mercato finanziario e quali no.

**Esempio 2.2** Si prenda un mercato in cui l'unica variabile di stato è il tasso di interesse

$$dr(t) = \mu_r(t, r) dt + \sigma_r(t, r) dW_r,$$

e in cui si trovano un titolo privo di rischio e un titolo rischioso

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{G(t)} &= r(t) dt, \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu(t, S, r) dt + \sigma_S(t, S, r) dW_S. \end{aligned}$$

Per ricondurre questo mercato alla forma appena presentata, bisogna definire le seguenti matrici

$$\begin{aligned} dW &= \begin{bmatrix} dW_r \\ dW_S \end{bmatrix}, & \Omega' &= [ \sigma_r \quad 0 ] \\ \Sigma' &= [ 0 \quad \sigma_S ], \end{aligned}$$

da cui osserviamo che vale

$$\begin{aligned} \Sigma' \xi &= \mu - r, \\ \begin{bmatrix} 0 & \sigma_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_r \\ \xi_S \end{bmatrix} &= \mu - r, \end{aligned}$$

ovvero esistono infiniti vettori  $\xi$  che soddisfano la condizione di non arbitraggio. Il mercato, infatti, è in grado di dare un valore preciso solo al prezzo di mercato del rischio del titolo  $S$

$$\xi_S = \frac{\mu - r}{\sigma_S},$$

mentre l'altro prezzo di mercato del rischio ( $\xi_r$ ) può assumere un qualsiasi valore: il mercato è incompleto. Questo significa che non esiste nessun portafoglio formato da  $G$  e da  $S$  con cui si riesce a replicare il processo del tasso di interesse.

**N. B. 2.6** Nell'esempio precedente NON è sufficiente ammettere che il valore  $S(t)$  sia correlato con il tasso di interesse per completare il mercato. Se, infatti, vale

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t, S, r) dt + \sigma_S(t, S, r) dW_S + \sigma_{Sr}(t, S, r) dW_r,$$

l'equazione

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Sr} & \sigma_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_r \\ \xi_S \end{bmatrix} = \mu - r,$$

ha, comunque, infinite soluzioni.

**Esempio 2.3** Il mercato contiene un titolo privo di rischio e un titolo rischioso

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{G(t)} &= r(t) dt, \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu(t, S) dt + \sigma_S(t) dW_S, \end{aligned}$$

ma la varianza del titolo  $S(t)$  è aleatoria:

$$d\sigma_S^2 = \mu_\sigma(t, \sigma_S) dt + \sigma_\sigma(t, \sigma_S) dW_\sigma,$$

rappresentando un tipico modello GARCH. Anche in questo esempi, come nel precedente, il mercato non è completo. Non si riesce, infatti, con un portafoglio formato da  $G$  e da  $S$  a replicare il proceso della varianza  $\sigma_S^2$ .

L'approccio della martingala, in questo caso, fallisce perché la matrice  $\Sigma$  non è invertibile. Le alternative sono due:

1. continuare a usare l'approccio della martingala completando, in qualche modo, il mercato;
2. usare l'approccio di Bellman che, come già mostrato, non richiedeva l'ipotesi di completezza del mercato.

Vediamo nei paragrafi seguenti i due casi.

## 2.9 Bellman con mercati incompleti (il caso CRRA)

L'equazione di Bellman è

$$0 = \max_{\theta_S, c} [v(t_0, t) U_1(c)] + \mathcal{A}J(t, \bullet),$$

dove il differenziale di Itô ( $\mathcal{A}$ ) non va più calcolato solo rispetto a  $R$  ma anche rispetto a tutte le variabili di stato  $z$ . Senza considerare il problema del consumo, allora, si ha

$$0 = \max_{\theta_S} \left[ \begin{array}{l} J_t + J_R (Rr + \theta_S' I_S (\mu - r\mathbf{1})) + \frac{1}{2} J_{RR} \theta_S' I_S \Sigma' \Sigma I_S \theta_S^* \\ + \mu_z' J_z + \frac{1}{2} tr(\Omega' \Omega J_{zz}) + \theta_S' I_S \Sigma' \Omega J_{zR} \end{array} \right],$$

e la condizione del primo ordine diviene

$$I_S \theta_S^* = -\frac{J_R}{J_{RR}} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) - \frac{1}{J_{RR}} \underbrace{(\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Omega J_{zR}}_{n \times s},$$

dove si nota che, rispetto al risultato ottenuto nella (18), al portafoglio sono state aggiunte  $s$  componenti, una per ogni variabile di stato aggiunta al modello. La prima componente del portafoglio viene definita speculativa poiché essa prende solo in considerazione l'avversione al rischio dell'agente economico (nell'indice di Atto-Pratt calcolato sulla funzione valore  $J$ ) e rendimenti medi e varianze dei titoli rischiosi. La seconda serie di  $s$  componenti del portafoglio, invece, viene chiamata di immunizzazione perché dipende dalla volatilità delle variabili di stato ( $\Omega$ ) e da come la funzione valore  $J$  reagisce rispetto alle variabili di stato ( $J_{zR}$ ).

Sostituendo il valore ottimo del portafoglio nell'equazione differenziale per  $J$  si ottiene l'HJB<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} 0 = & J_t + J_R Rr - \frac{1}{2} \frac{J_R^2}{J_{RR}} \xi' \xi - \frac{1}{2} \frac{1}{J_{RR}} J_{zR}' \Omega' \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Omega J_{zR} \\ & + \mu_z' J_z + \frac{1}{2} tr(\Omega' \Omega J_{zz}) - \frac{J_R}{J_{RR}} \xi' \Omega J_{zR}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Nell'HJB ho posto

$$\xi = \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}).$$

che è un'equazione alle derivate parziali altamente non lineare.

Se la funzione di utilità è CRRA nella forma

$$U(R) = \frac{R^{1-\delta}}{1-\delta},$$

allora la funzione valore deve avere la forma

$$J(R, t) = F(t, z)^\delta \frac{R^{1-\delta}}{1-\delta},$$

da cui

$$\begin{aligned} J_t &= \delta F^{\delta-1} \frac{R^{1-\delta}}{1-\delta} F_t, \\ J_R &= F^\delta R^{-\delta}, \\ J_{RR} &= -\delta F^\delta R^{-\delta-1}, \\ J_z &= \delta F^{\delta-1} \frac{R^{1-\delta}}{1-\delta} F_z, \\ J_{zz} &= \delta(\delta-1) F^{\delta-2} \frac{R^{1-\delta}}{1-\delta} F_z F'_z + \delta F^{\delta-1} \frac{R^{1-\delta}}{1-\delta} F_{zz}, \\ J_{zR} &= \delta F^{\delta-1} R^{-\delta} F_z, \end{aligned}$$

che, sostituite nell'HJB, danno

$$\begin{aligned} 0 &= F_t + \left( \mu'_z + \frac{1-\delta}{\delta} \xi' \Omega \right) F_z + \frac{1}{2} \text{tr} (\Omega' \Omega F_{zz}) - \frac{\delta-1}{\delta} \left( r + \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} \xi' \xi \right) F \\ &\quad + \frac{1}{2} (1-\delta) F^{-1} F'_z \Omega' \left( \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' - I \right) \Omega F_z, \end{aligned}$$

con condizione al contorno

$$F(T, z) = 1, \quad \forall z$$

e con il portafoglio ottimo dato da

$$\frac{1}{R} I_S \theta_S^* = \frac{1}{\delta} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r \mathbf{1}) + \frac{1}{F} (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Omega F_z.$$

Sfortunatamente l'HJB non è parabolica a causa dell'ultimo addendo. Esso svanisce in due casi

1. quando  $1-\delta=0$  cioè quando  $\delta=1$  e la funzione di utilità è logaritmica. In questo caso, infatti, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= F_t + \mu'_z F_z + \frac{1}{2} \text{tr} (\Omega' \Omega F_{zz}), \\ F(T, z) &= 1, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è

$$F(t, z) = 1, \quad \forall t$$

avendo così  $F_z = \mathbf{0}$  e il portafoglio dato da

$$\frac{1}{R} I_S \theta_S^* = (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r \mathbf{1}),$$

2. quando  $\Omega = \mathbf{0}$  cioè quando le variabili di stato sono deterministiche e, quindi, non vi è ragione di immunizzarsi dalle loro variazioni «inattese»;
3. quando  $\Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' = I$  cioè quando esiste l'inversa sinistra di  $\Sigma'$  e, dunque, il mercato è completo.

Quando non si verifica nessuna delle condizioni sopra esposte, bisogna porre in atto procedure tali da trovare una soluzione, anche approssimata, o numerica, dell'HJB.

## 2.10 Martingala con mercati incompleti

Si è già osservato che l'approccio della martingala non vale se i mercati sono incompleti perché non si può determinare univocamente il portafoglio che replica la ricchezza ottima. In mercati incompleti, infatti, i portafoglio replicanti non sono, in genere, determinabili.

L'unico modo per mantenere l'approccio della martingala è quello di completare in modo artificiale il mercato.

L'idea è quella di inserire dei titoli «finti» scegliendo, tuttavia, i loro parametri (di rendimento e volatilità) in modo che sia ottimo non investirvi.

Il mercato sia fatto

$$\begin{aligned} \frac{dG}{G} &= r dt \\ I_S^{-1} \frac{dS}{n \times n} &= \frac{\mu}{n \times 1} dt + \frac{\Sigma'}{n \times (n+k)} \frac{dW}{(n+k) \times 1} \end{aligned}$$

dove ho  $k$  fonti di rischio in più rispetto ai titoli.

Creo dei titoli supplementari (in numero di  $k$ ) per completare il mercato

$$I_{S_c}^{-1} \frac{dS_c}{k \times k} = \frac{\mu_c}{k \times 1} dt + \frac{\Sigma'_c}{k \times (n+k)} \frac{dW}{(n+k) \times 1}$$

in modo che il nuovo mercato finanziario artificiale sia completo

$$I_{\hat{S}}^{-1} \frac{d\hat{S}}{(n+k) \times (n+k)} = \frac{\hat{\mu}}{(n+k) \times 1} dt + \frac{\hat{\Sigma}'}{(n+k) \times (n+k)} \frac{dW}{(n+k) \times 1}$$

dove

$$\hat{\mu} \equiv \begin{bmatrix} \mu \\ \mu_c \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma}' \equiv \begin{bmatrix} \Sigma' \\ \Sigma'_c \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\Sigma_c$  non viene scelta a caso ma in modo tale che valga

$$\Sigma'_c \Sigma_c = I \quad (23)$$

$$\Sigma'_c \Sigma = 0 \quad (24)$$

ovvero che:

1. i rendimenti  $I_{S_c}^{-1} dS_c$  (dei titoli fittizi) siano tra loro incorrelati e abbiano varianza unitaria;
2. i rendimenti  $I_{S_c}^{-1} dS_c$  (dei titoli fittizi) siano incorrelati con i rendimento  $I_S^{-1} dS$  (dei titoli reali).

Queste ipotesi appena fatte ci permettono di semplificare la matrice  $\hat{\Sigma}^{-1}$ . Per calcolarla occorre impostare il sistema

$$\hat{\Sigma}'^{-1} \hat{\Sigma}' = I$$

$$\left[ \begin{array}{cc} A & B \\ (n+k) \times n & (n+k) \times k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Sigma' \\ n \times (n+k) \\ \Sigma'_c \\ k \times (n+k) \end{array} \right] = I$$

da cui

$$A \Sigma' + B \Sigma'_c = I$$

Postmoltiplico per  $\Sigma_c$  ottenendo

$$A \Sigma' \Sigma_c + B \Sigma'_c \Sigma_c = \Sigma_c$$

e, poiché ho calcolato  $\Sigma_c$  in modo che valgano la (23) e la (24) ottengo

$$B = \Sigma_c$$

postmoltiplicando per  $\Sigma$  poi ho

$$A \Sigma' \Sigma + B \Sigma'_c \Sigma = \Sigma$$

e poiché deve valere la (24) ho

$$A \Sigma' \Sigma = \Sigma$$

$$A = \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1}$$

da cui ricavo

$$\hat{\Sigma}'^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} & \Sigma_c \end{array} \right]$$

Il prezzo di mercato del rischio, allora, è dato da

$$\hat{\Sigma}' \hat{\xi} = \hat{\mu} - r \mathbf{1},$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\hat{\xi} &= \hat{\Sigma}'^{-1} (\hat{\mu} - r\mathbf{1}) \\
&= \begin{bmatrix} \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} & \Sigma_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu - r\mathbf{1} \\ \mu_c - r\mathbf{1} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1})}_{\xi} + \Sigma_c (\mu_c - r\mathbf{1})
\end{aligned}$$

Faccio notare che il quadrato del prezzo di mercato del rischio è

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}' \hat{\xi} &= \left( (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' + (\mu_c - r\mathbf{1})' \Sigma_c' \right) \left( \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) + \Sigma_c (\mu_c - r\mathbf{1}) \right) \\
&= (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) \\
&\quad + (\mu_c - r\mathbf{1})' \Sigma_c' \Sigma (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) \\
&\quad + (\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Sigma_c (\mu_c - r\mathbf{1}) \\
&\quad + (\mu_c - r\mathbf{1})' \Sigma_c' \Sigma_c (\mu_c - r\mathbf{1})
\end{aligned}$$

e valendo la (23) e la (24) si semplifica

$$\hat{\xi}' \hat{\xi} = \underbrace{(\mu - r\mathbf{1})' (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1})}_{\xi' \xi} + (\mu_c - r\mathbf{1})' (\mu_c - r\mathbf{1}).$$

Il portafoglio ottimo, allora, diviene

$$\frac{1}{R(t)} I_{\hat{S}} \hat{\theta}^* = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) \\ \mu_c - r\mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{F(z,t)} (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Omega_{k \times s} F_z(z,t) \\ \frac{1}{F(z,t)} \Sigma_c' \Omega_{k \times s} F_z(z,t) \end{bmatrix},$$

da cui posso ricavare il valore di  $\mu_c$  in modo che soddisfaccia la condizione

$$\mu_c = r\mathbf{1} - \frac{\delta}{F(z,t)} \Sigma_c' \Omega_{k \times s} F_z(z,t),$$

cioè che sia conveniente non investire nulla nei titoli fittizi.  $\Sigma_c$  era già stato determinato in precedenza e l'equazione che ho scritto è solo in  $\mu_c$ .

Nel caso del logaritmo ho il banale risultato  $\mu_c = r\mathbf{1}$  e il portafoglio ottimo è

$$\frac{1}{R(t)} I_{\hat{S}} \hat{\theta}^* = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} (\Sigma' \Sigma)^{-1} (\mu - r\mathbf{1}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{F(z,t)} (\Sigma' \Sigma)^{-1} \Sigma' \Omega_{k \times s} F_z(z,t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

In altri casi, poiché la funzione  $F(z,t)$  contiene  $\mu_c$ , gli  $s$  termini di immunizzazione del portafoglio per i titoli veri non sono gli stessi che si avrebbero se il mercato fosse completo.

## 2.11 Bibliografia essenziale

Sul mercato in tempo discreto il testo, a mio avviso, migliore è:

Pliska, S. R. (1997). Introduction to Mathematical Finance - Discrete time Models. Blackwell

Sul mercato in tempo continuo confrontato al tempo discreto penso di aver scritto una cosa da non buttare:

Menoncin, F. (2006). Mercati finanziari e gestione del rischio. Isedi

Sul mercato continuo:

1. a livello molto intuitivo e di facile esposizione:

Björk, T. (1998). Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford

Cvitanic, J., Zapatero, F. (2004). Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets. MIT Press

2. per chi ama un po' di più il formalismo

Øksendal, B. (2000). Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications. Springer

3. per chi è votato al martirio

Karatzas, I., Shreve S. E. (2001). Methods of Mathematical Finance. Springer