APPLICAZIONI LINEARI

Si ricorda che una relazione *f* tra due insiemi U e V, indicata con

$$f : \mathrm{U} \to \mathrm{V},$$

si dice *applicazione*, o *funzione*, se *f* associa ad ogni elemento di U uno e un solo elemento di V.
Il *dominio* dell'applicazione *f* è l'insieme costituito da tutti e soli gli elementi su cui opera *f*, ossia l'insieme U; il *codominio*, o *immagine* dell'applicazione, è costituito da tutti e soli gli elementi che *f* fa corrispondere agli elementi di U e lo si indica con $f(\mathrm{U})$ o $\mathrm{Im}(f)$. Generalmente $f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$.
Se $\mathbf{x} \in \mathrm{U}$ e $\mathbf{y} \in \mathrm{V}$ sono due elementi associati nella *f*, si scrive $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$. Si dice anche che **y** è *immagine* di **x** attraverso la *f* e che **x** è la *controimmagine* di **y** attraverso la *f*.

Dati due spazi lineari U e V, l'applicazione $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ è *lineare* se per ogni scalare *k* e per ogni coppia di elementi $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathrm{U}$ vale

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u})$$

- **Esempio 38** (si veda Esempio 2.56).

1. Consideriamo l'applicazione $f : \Re^2 \to \Re^2$ che associa ad ogni punto del piano la sua proiezione sull'asse delle ascisse.
2. Consideriamo l'applicazione $g : \Re^2 \to \Re$ che associa ad ogni punto $P = [x_1 x_2]^T$ del piano la sua prima coordinata x_1.

1. è un'applicazione lineare, infatti

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

$$f(k\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} = kf(\mathbf{u})$$

2. è un'applicazione lineare, infatti

$$g(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = g\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = u_1 + v_1 = g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})$$
$$g(k\mathbf{u}) = g\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}\right) = ku_1 = kg(\mathbf{u})$$

- **Esempio 39** (Esempio 2.60).

L'applicazione $f : \mathbf{M}(n \times n) \to \Re$, che associa ad ogni matrice quadrata ad elementi reali il suo determinante, non è lineare.
Infatti, scelte due matrici qualsiasi $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}(n \times n)$, si ha in generale, per $n \geq 2$,

$$\text{Det}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \text{Det}(\mathbf{A}) + \text{Det}(\mathbf{B}).$$

Anche la seconda condizione non è soddisfatta per ogni scalare k, infatti Det($k\mathbf{A}$) = k^nDet($\mathbf{A}$) e non Det($k\mathbf{A}$) = kDet($\mathbf{A}$).

Diamo ora una seconda, ed equivalente, definizione di applicazione lineare:

L'applicazione $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, con U e V spazi lineari, è *lineare* se $\forall h, k \in \Re, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{U}$ vale

$$f(k\mathbf{u} + h\mathbf{v}) = kf(\mathbf{u}) + hf(\mathbf{v})$$

Se f è un'applicazione lineare, allora

$$f(\mathbf{0}_\mathrm{U}) = \mathbf{0}_\mathrm{V}$$

dove $\mathbf{0}_\mathrm{U}$ è il vettore nullo di U e $\mathbf{0}_\mathrm{V}$ è il vettore nullo di V.
Questa è quindi una *condizione necessaria* affinché l'applicazione f sia lineare. La condizione non è sufficiente, come si può vedere dall'Esempio 39.

Teorema 2.23 (*fondamentale dell'algebra lineare* o *di rappresentazione*)
$f : \Re^n \to \Re^m$ è lineare se e solo se esiste $\mathbf{A}(m \times n)$ tale che

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^n$$

A è una matrice ($m \times n$) ed è detta *matrice associata alla applicazione* f. Essa è univocamente determinata una volta che siano state scelte le basi in $\Re^n$ e $\Re^m$.

Lo spazio Im(*f*), lo spazio immagine dell'applicazione, è un sottospazio lineare di $\Re^m$. Si dimostra inoltre che, se $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, ..., \mathbf{v}^{(n)}$ è la base di $\Re^n$,

$$\mathbf{A} = \left[f(\mathbf{v}^{(1)}) \quad f(\mathbf{v}^{(2)}) \quad ... \quad f(\mathbf{v}^{(n)}) \right]$$

e, se si considera la base canonica in $\Re^n$,

$$\mathbf{A} = \left[f(\mathbf{e}^{(1)}) \quad f(\mathbf{e}^{(2)}) \quad ... \quad f(\mathbf{e}^{(n)}) \right],$$

ossia le colonne di $\mathbf{A}$ sono le immagini degli n vettori della base di $\Re^n$.

- **Esempio 40** (si veda Esempio 2.66).

Riprendiamo l'Esempio 38.

1. $f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix}$

2. $g\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=1, g\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=0$

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, $g(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1$

- **Esempio 41.**

Le applicazioni

$f:\Re^+ \to \Re : f(x) = \ln x$

$f:\Re \to \Re : f(x) = x^2$

$f:\Re \to \Re^+ : f(x) = e^x$

non sono lineari, infatti

$\ln(x_1 + x_2) \neq \ln(x_1) + \ln(x_2)$

$(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$

$e^{x_1 + x_2} \neq e^{x_1} + e^{x_2}$

Teorema 2.24

Sia $f:\Re^n \to \Re^m$ un'applicazione lineare con matrice associata **A**, allora la dimensione dello spazio immagine è

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(f)) = r(\mathbf{A})$$

Data l'applicazione $f:\Re^n \rightarrow \Re^m$, l'insieme dei vettori **x** tali che

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$$

è detto *nucleo dell'applicazione f* e si indica con Ker(f).

Ker(f) è l'insieme delle controimmagini del vettore nullo **0** di $\Re^n$.

Teorema 2.25
Ker(f) è un sottospazio lineare di $\Re^n$.

Teorema 2.26 (di Sylvester)

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f))=n-r(\mathbf{A})$$

Ker(f) non è mai vuoto perché $\mathbf{0}\in$ Ker(f).

- **Esempio 42** (si veda Esempio 2.70)

Riprendiamo l'Esempio 40. Per l'applicazione 1. si ha

$$\text{Ker}(f)=\{\mathbf{x}\in\Re^2 : \mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}=\{\mathbf{x}\in\Re^2 : x_1=0\}$$

Infatti $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, ed essendo $r(\mathbf{A})$=1, dal Teorema 2.26 segue

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f))=2-1=1$$

Per l'applicazione 2. si ha

$$\text{Ker}(g)=\{\mathbf{x}\in\Re^2 : \mathbf{Ax}=0\}=\{\mathbf{x}\in\Re^2 : x_1=0\}$$

Infatti $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$, ed essendo $r(\mathbf{A})$=1, dal Teorema 2.26 segue

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f))=2-1=1$$

- **Esempio 43.**

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$ è un'applicazione lineare (verificare!) da $\Re^3$ in $\Re^3$.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$, ed essendo $r(\mathbf{A})$=3, dal Teorema 2.26 segue

$$\text{Dim}(\text{Ker}(f))=3-3=0$$

quindi l'unica controimmagine dello **0** è **0**.

Complementi ed esercizi

• Sono sottospazi lineari?

1) $\text{V} = \{[x_1, x_2]^T \in \Re^2 : x_2 = mx_1, m \in \Re\}$

(R.:sì, per ogni m)

2) $\text{V} = \{[x_1, x_2]^T \in \Re^2 : x_1 + x_2 = 1\}$

(R.:no)

3) $\text{V} = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \Re^3 : x_1 = 3x_2, x_3 = 0\}$

(R.:sì)

4) $\text{V} = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \Re^3 : x_1 = x_2, x_3 = 1\}$

(R.:no)

5) $\text{V} = \{0\}$

(R.:sì)

6) $\text{V} = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \Re^3 : x_1 \le 0, x_2 + x_3 = 1\}$

(R.:no)

• **A**, matrice quadrata di ordine n, è detta *emisimmetrica*, o *antisimmetrica*, se

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}.$$

1) Come sono gli elementi di **A**?

2) Trovare le proprietà del determinante di **A**.

(R.:si veda a pag.108)

• **A**, matrice quadrata di ordine n, è detta *ortogonale*, se

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{T}.$$

1) Verificare che le colonne di **A** sono vettori tra loro ortogonali e di norma unitaria.
2) Trovare le proprietà del determinante di **A**.
(R.:si veda a pag.107)

- Data una matrice **A**, quadrata di ordine n, si definisce *traccia* di **A**, il numero

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{T})$
- $\mathrm{tr}(a\mathbf{A}+b\mathbf{B})=a\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})+b\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})$, a,b scalari
- $\mathrm{tr}(\mathbf{AB})=\mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

Prodotti scalari notevoli

$$\mathbf{u}^{T}\mathbf{x} = [1\,1\ldots 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- $\mathbf{x}^{T}\mathbf{e}^{(i)} = x_i$, con $\mathbf{e}^{(i)}$ vettore fondamentale.
- $\mathbf{x}^{T}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^{2}{}_{i} = \|\mathbf{x}\|^{2}$

Proprietà del prodotto scalare

- $\mathbf{x}^{T}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{T}\mathbf{x}$
- $(a\,\mathbf{x}^{T})\mathbf{y} = a\,(\mathbf{x}^{T}\mathbf{y})$
- $(\mathbf{x}^{T}+\mathbf{y}^{T})\mathbf{z} = \mathbf{x}^{T}\mathbf{z}+\mathbf{y}^{T}\mathbf{z}$

L'angolo θ tra due vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è tale che

$$\cos q = \frac{\mathbf{x}^{T}\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

Essendo $|\cos\theta| \leq 1$ segue la *disuguaglianza di Cauchy Schwartz* (pag.171)

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Se i vettori sono tra loro ortogonali, allora
cos θ=0.

Un insieme di vettori è *ortonormale* se è costituito da vettori ortogonali a norma unitaria.

Si definisce *base ortonormale* di un sottospazio lineare V una base $S = \{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ tale che

$$(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)}) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Mediante il *procedimento di Gram Schmidt,* data una base qualunque di V, si può costruire una base ortonormale S.

Teorema 2.22.
Il rango di una matrice $\mathbf{A}$ di ordine $n \times m$ coincide con l'ordine della più grande sottomatrice quadrata non singolare di $\mathbf{A}$.
Le colonne che corrispondono a questa sottomatrice sono una base per il sottospazio generato dalle colonne di $\mathbf{A}$.

Inoltre r(**A**) è un numero intero non negativo ed è

$$0 \leq \mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$$

- $\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$
- $\mathrm{r}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=\mathrm{r}(\mathbf{A})$
- $\mathrm{r}(\mathbf{AB})\leq\min(\mathrm{r}(\mathbf{A}),\mathrm{r}(\mathbf{B}))$

Applicazioni lineari
Sono applicazioni lineari?

1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(R.:sì)
2) $f([\mathbf{x}]) = \|\mathbf{x}\|$
(R.:no)

Se $f : \Re^n \to \Re^m$ è un'applicazione lineare, Im(*f*) e Ker(*f*) sono sottospazi lineari di quali spazi rispettivamente?
(R.: Im(*f*) è sottospazio di $\Re^m$, Ker(*f*) è sottospazio di $\Re^n$).

Cambio di base e similitudine

Consideriamo un'applicazione lineare $f : \Re^n \to \Re^n$.

Vogliamo confrontare la rappresentazione di un vettore rispetto ad una data base di $\Re^n$ (ad esempio la base canonica) con la corrispondente rappresentazione rispetto ad un'altra base di $\Re^n$.

Teorema 2.27
Sia $f : \Re^n \to \Re^n$ e siano $\mathrm{K} = \{\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \ldots, \mathbf{z}^{(n)}\}$ e $\mathrm{H} = \{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ due basi di $\Re^n$.
Sia **A** la matrice associata a *f* secondo la base K e **B** la matrice associata a *f* secondo la base H.
Allora esiste una matrice **S** quadrata di ordine *n*, non singolare, tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}$$

S è detta *matrice di transizione* dalla base H alla base K.

• **Esempio 44** (Esempio 2.74).
Sia $f : \Re^3 \to \Re^3$ tale che

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

La matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove le colonne sono le immagini della base canonica $\mathrm{K} = \{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)}\}$.

Un'altra base H per $\Re^3$ è costituita dai vettori (linearmente indipendenti)

$$\mathbf{v}^{(1)} = [1 \quad -1 \quad 0]^T, \; \mathbf{v}^{(2)} = [1 \quad 0 \quad -1]^T, \; \mathbf{v}^{(3)} = [0 \quad 1 \quad 1]^T.$$

La matrice associata all'applicazione nella nuova base è

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ottenuta mediante la matrice di transizione $\mathbf{S}$, che riporta le coordinate dei vettori della base H in termini dei vettori della base (canonica) K:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

con

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Infatti si verifica che vale $\mathbf{A} = \mathbf{SBS}^{-1}$, ossia

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La relazione tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ può essere generalizzata come segue:

Date due matrici **A** e **B** di ordine *n*, si dice che **A** *è simile a* **B**, o che **A** e **B** *sono simili tra loro*, se esiste una matrice quadrata non singolare, dello stesso ordine, tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}.$$

La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza, infatti è facile verificare che la relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva.