Microeconomia per la finanza

Francesco Menoncin*

Seconda lezione

Sommario

Si introduce il concetto della Dominanza Stocastica e si mostrano le sue relazioni con l'utilità attesa.

1 La dominanza stocastica (del primo ordine)

Si può avere subito una chiara visione di quale lotteria preferire quando la probabilità di avere ALMENO un certo guadagno è sempre più elevata in una delle due lotterie. In questo caso, ovviamente, conviene scegliere la lotteria che presenta la probabilità più elevata.

Un esempio ci sarà di immediato conforto[1].

$$A = \left\{ \begin{array}{ccc} 100 & 150 & 200 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{array} \right. \qquad B = \left\{ \begin{array}{ccc} 100 & 150 & 200 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{array} \right.$$

Date le lotterie A e B osserviamo che esse hanno entrambe gli stessi rendimenti ma con diverse probabilità. Indicando con $\mathbb{P}\left(x \geq X | L\right)$ la probabilità di vincere una cifra ALMENO uguale a X dato che si sta giocando la lotteria L, possiamo scrivere

$$\begin{array}{cc} \mathbb{P}\left(x \geq 100 | A\right) = 1, & \mathbb{P}\left(x \geq 100 | B\right) = 1, \\ \mathbb{P}\left(x \geq 150 | A\right) = 0.5, & \mathbb{P}\left(x \geq 150 | B\right) = 0.4, \\ \mathbb{P}\left(x \geq 200 | A\right) = 0.2, & \mathbb{P}\left(x \geq 200 | B\right) = 0.1, \end{array}$$

da cui osserviamo chiaramente che la lotteria A offre sempre una probabilità di vittoria maggiore quando si confronta la probabilità di vincere almeno una data

*Dipartimento di Scienze Economiche, Università degli Studi di Brescia, Via S. Faustino, 74/B, 25122 Brescia. Tel: 0039-030-2988806, fax: 0039-030-2988837, e-mail: menoncin@eco.unibs.it

[1] Faccio notare che il valore atteso delle lotterie è uguale:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A] &= 100 \cdot 0.5 + 150 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.2 = 135, \\ \mathbb{E}[B] &= 100 \cdot 0.6 + 150 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.1 = 135. \end{aligned}$$

cifra. Quando ciò accade appare evidente scegliere la lotteria A rispetto alla lotteria B.

Sapendo che la probabilità che la variabile x assuma ALMENO il valore X è

$$\mathbb{P}(x \geq X) = \int_X^{\infty} \pi(x)\, dx = 1 - \int_{-\infty}^{X} \pi(x)\, dx = 1 - \Pi(X),$$

allora si può concludere che

$$\mathbb{P}(x \geq X|\, \pi_1) > \mathbb{P}(x \geq X|\, \pi_2) \Leftrightarrow 1 - \Pi_1 > 1 - \Pi_2(X),$$

e, dunque, vale la seguente definizione.

Definizione 1 (dominanza stocastica del primo ordine) *Se date due distribuzioni di probabilità* Π_1 *e* Π_2 *accade che*

$$\Pi_1(x) \geq \Pi_2(x), \qquad \forall x \in \Omega$$

allora si dice che Π_2 *domina stocasticamente* Π_1 *al primo ordine (si parla di Dominanza Stocastica del Primo ordine - DSP ovvero First order Stochastic Dominance - FSD).*

La dominanza stocastica si può, dunque, rappresentare per le lotterie A e B nel modo seguente:

$$A = \begin{cases} \text{Vincite} & 100 & 150 & 200 \\ \pi & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ \Pi & 0.5 & 0.8 & 1 \end{cases} \qquad B = \begin{cases} \text{Vincite} & 100 & 150 & 200 \\ \pi & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ \Pi & 0.6 & 0.9 & 1 \end{cases}$$

da cui appare evidente che A è preferita a B poiché $\Pi_A \leq \Pi_B$.

Ogni agente economico che preferisca il più al meno (cioè abbia una funzione di utilità attesa strettamente crescente) deve, allora, preferire la lotteria la cui distribuzione di probabilità domina stocasticamente le altre (almeno al primo ordine fin qui definito).

Proposizione 2 *Per qualsiasi utilità attesa* $U(x)$ *crescente*[2], *la distribuzione* $\Pi_2(x)$ *domina stocasticamente la distribuzione* $\Pi_1(x)$ *al primo ordine se e solo se*

$$\int_{\Omega} U(x)\, d\Pi_2(x) \geq \int_{\Omega} U(x)\, d\Pi_1(x),$$

ovvero

$$\mathbb{E}[U(x)|\, \pi_1] \geq \mathbb{E}[U(x)|\, \pi_2].$$

[2] Se l'utilità è STRETTAMENTE crescente allora vale, di seguito, il segno di disuguaglianza stretta.

Applichiamo questo criterio alle lotterie suesposte A e B utilizzando la funzione utilità logaritmo (che è una funzione crescente):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\ln\left(A\right)\right] &= 0.5\ln 100 + 0.3\ln 150 + 0.2\ln 200 \simeq 4.87, \\
\mathbb{E}\left[\ln\left(B\right)\right] &= 0.6\ln 100 + 0.3\ln 150 + 0.1\ln 200 \simeq 4.80,
\end{aligned}$$

da cui concludiamo che la lotteria A è preferita alla lotteria B (come avevamo già avuto modo di osservare).

1.1 Un esempio

Vediamo il caso di funzioni di densità esponenziali nella forma

$$\pi\left(x\right) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad \forall \alpha > 0,$$

definite sul tutti gli x non negativi. Faccio notare che $\pi\left(x\right)$ ha tutte le caratteristiche di una funzione di densità poiché assume, nel dominio, valori solo positivi ed il suo integrale su tutto il dominio vale 1

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = \left[-e^{-\alpha x}\right]_0^\infty = 0 + 1.$$

Prendendo diversi valori di α si ottengono le curve della Figura 1.

Vogliamo ora chiederci se esista la possibilità di ordinare le lotterie che hanno distribuzione di probabilità esponenziale in base al parametro α. Sappiamo che il criterio della dominanza stocastica del primo ordine afferma che una distribuzione è preferita ad un'altra se la sua funzione di distribuzione (densità cumulata) è sempre minore. Calcoliamo, dunque, la funzione di distribuzione associata a $\pi\left(x\right)$ avendo

$$\Pi\left(x\right) = \int_0^x \pi\left(z\right) dz = \int_0^x \alpha e^{-\alpha z} dz = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Calcoli banali ci portano a concludere che

$$\Pi\left(x, \alpha_1\right) \geq \Pi\left(x, \alpha_2\right) \Leftrightarrow \alpha_1 \geq \alpha_2.$$

Questo significa che tanto maggiore è il parametro α tanto meno preferibile è la lotteria che si sta analizzando. Vediamo questo risultato in forma visiva attraverso i grafici della Figura 2 in cui riportiamo le funzioni di ripartizione per diversi valori di α.

Dalla figura si vede chiaramente che tanto maggiore è α tanto più bassa è la probabilità di ottenere una vincita ALMENO pari ad un livello dato. Al fine di facilitare l'analisi si fa spesso un grafico non tanto della funzione di ripartizione ma, piuttosto, del complemento ad uno della funzione di ripartizione: $1 - \Pi\left(x\right)$. Questo caso è rappresentato nella Figura 3.

Abbiamo così risolto tutti i nostri problemi? Il lettore si sarà già accorto che questo sistema di classificazione delle lotterie non è sufficiente quando la probabilità cumulata di una lotteria non è sempre maggiore (o uguale) a quella delle altre lotterie. Ci occupiamo nel prossimo paragrafo di questo caso.

Figura 1: Funzione di densità esponenziale $\alpha e^{-\alpha x}$ (con $\alpha = 1$ linea intera, $\alpha = 1/2$ linea tratteggiata e $\alpha = 3/2$ linea putata).

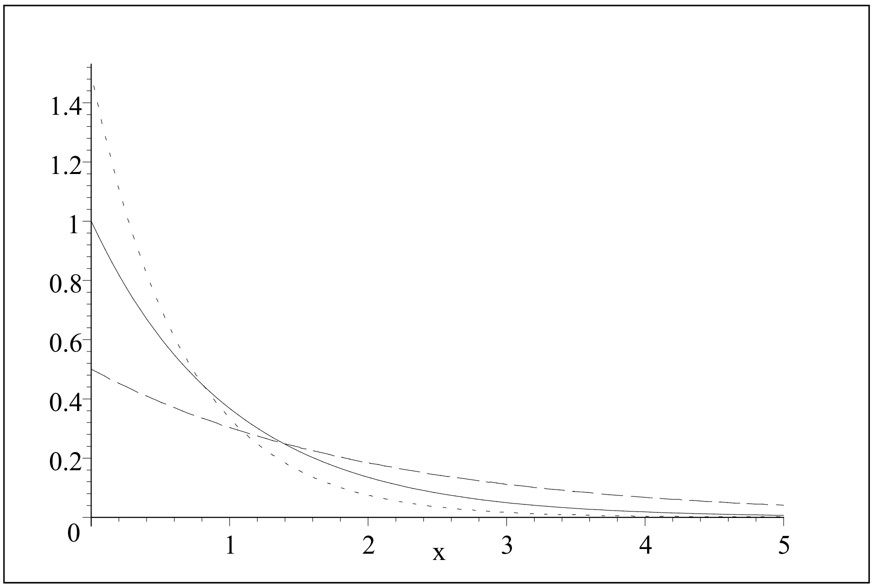


Figura 2: Funzione di ripartizione $1 - e^{-\alpha x}$ (con $\alpha = 1$ linea intera, $\alpha = 1/2$ linea tratteggiata e $\alpha = 3/2$ linea putata).

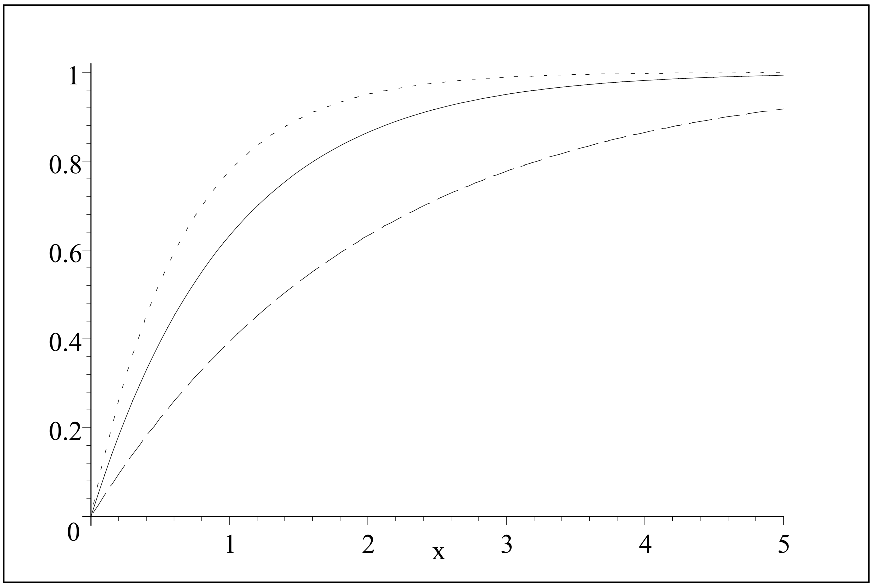
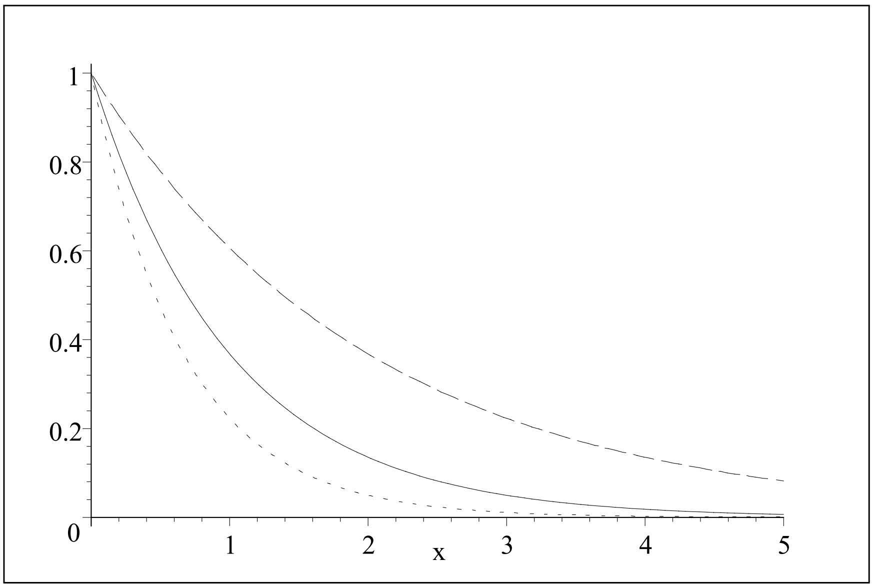


Figura 3: Complemento alla funzione di ripartizione $e^{-\alpha x}$ (con $\alpha = 1$ linea intera, $\alpha = 1/2$ linea tratteggiata e $\alpha = 3/2$ linea putata).



1.2 La dominanza stocastica (del secondo ordine)

Riprendiamo il caso di due lotterie ma, questa volta, fatte come segue:

$$A = \begin{cases} 100 & 150 & 200 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{cases} \qquad B = \begin{cases} 100 & 150 & 200 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{cases}$$

per le quali le probabilità cumulate valgono

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}\,(x \geq 100|\,A) = 1, & \mathbb{P}\,(x \geq 100|\,B) = 1, \\ \mathbb{P}\,(x \geq 150|\,A) = 0.5, & \mathbb{P}\,(x \geq 150|\,B) = 0.4, \\ \mathbb{P}\,(x \geq 200|\,A) = 0.2, & \mathbb{P}\,(x \geq 200|\,B) = 0.3. \end{array}$$

E' evidente che, in questo caso, non si può utilizzare il criterio della dominanza stocastica del primo ordine. Infatti le due distribuzioni si incrociano e non si può affermare che una sia sempre non inferiore all'altra. Come procedere in questo caso?

Nell'esempio, appare evidente che fino al livello di guadagno almeno pari a 150 preferisco la lotteria A che offre una probabilità di vincita maggiore. Quando, tuttavia, passo a considerare un guadagno almeno pari a 200 la lotteria più conveniente diviene la B.

Nel paragrafo precedente al fine di confrontare due probabilità ne abbiamo confrontato le funzioni di distribuzione (cumulata). Ricordandoci che le funzioni di distribuzione sono l'integrale (la somma) delle funzioni di densità, sembra naturale, ancora una volta, calcolare un integrale per determinare il confronto.

Nel caso precedente avevamo concluso che qualora valesse

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} \pi_1(z)\,dz &\geq \int_{-\infty}^{x} \pi_2(z)\,dz, \\ \Pi_1(z) &\geq \Pi_2(z), \end{aligned}$$

preferiremmo la distribuzione π_2. Allo stesso modo, possiamo concludere che se vale

$$\int_{-\infty}^{x} \Pi_1(z)\,dz \geq \int_{-\infty}^{x} \Pi_2(z)\,dz,$$

allora la distribuzione π_2 è preferita rispetto a π_1 secondo una definizione di dominanza stocastica del secondo ordine.

Nel caso delle lotterie A e B abbiamo

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Vincite} & 100 & 150 & 200 \\ \pi & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ \Pi & 0.5 & 0.8 & 1 \\ \sum \Pi & 0.5 & 1.3 & 2.3 \end{array} \right. \qquad B = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Vincite} & 100 & 150 & 200 \\ \pi & 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ \Pi & 0.6 & 0.7 & 1 \\ \sum \Pi & 0.6 & 1.3 & 2.3 \end{array} \right.$$

da cui osserviamo che, pur non potendo concludere al livello della dominanza del primo ordine, possiamo concludere circa la dominanza stocastica del secondo ordine che ci fa preferire la lotteria A rispetto alla lotteria B.

Vale, allora, la definizione seguente.

Definizione 3 (dominanza stocastica del secondo ordine) *Se date due distribuzioni di probabilità* Π_1 *e* Π_2 *accade che*

$$\int_{-\infty}^{y} \Pi_1(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{y} \Pi_2(x)\,dx, \qquad \forall y \in \Omega$$

allora si dice che Π_2 *domina stocasticamente* Π_1 *al secondo ordine (si parla di Dominanza Stocastica del Secondo ordine - DSS ovvero Second order Stochastic Dominance - SSD).*

Uno dei risultati più interessanti riguardo la dominanza stocastica del secondo ordine è il seguente.

Proposizione 4 *Per qualsiasi utilità attesa* $U(x)$ *crescente e concava*[3]*, la distribuzione* $\Pi_2(x)$ *domina stocasticamente la distribuzione* $\Pi_1(x)$ *al secondo ordine se e solo se*

$$\int_{\Omega} U(x)\,d\Pi_2(x) \geq \int_{\Omega} U(x)\,d\Pi_1(x),$$

[3] Se l'utilità è STRETTAMENTE concava allora vale, di seguito, il segno di disuguaglianza stretta.

Tabella 1: Relazione tra la dominanza stocastica e l'utilità

Funzione	**Dominanza stocastica**	**Utilità**
densità $\pi(x)$	-	-
ripartizione $\Pi(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \pi(z)\, dz$	Primo ordine $\Pi_1(x) \geq \Pi_2(x)$	Con $U(x)$ crescente $\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, d\Pi_2(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, d\Pi_1(x)$
$\overline{\Pi}(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \Pi(z)\, dz$	Secondo ordine $\overline{\Pi}_1(x) \geq \overline{\Pi}_2(x)$	Con $U(x)$ crescente e concava $\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, d\Pi_2(x) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, d\Pi_1(x)$

ovvero

$$\mathbb{E}\left[U(x)|\,\pi_1\right] \geq \mathbb{E}\left[U(x)|\,\pi_2\right].$$

Possiamo utilizzare, ancora una volta, una funzione di utilità logaritmo per verificare che l'utilità attesa di A è maggiore dell'utilità attesa di B:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln(A)] &= 0.5\ln 100 + 0.3\ln 150 + 0.2\ln 200 \simeq 4.87, \\ \mathbb{E}[\ln(B)] &= 0.6\ln 100 + 0.1\ln 150 + 0.3\ln 200 \simeq 4.85. \end{aligned}$$

Si nota che valore atteso e varianza delle due lotterie sono

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A] &= 100 \cdot 0.5 + 150 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.2 = 135, \\ \mathbb{V}[A] &= (100-135)^2 \cdot 0.5 + (150-135)^2 \cdot 0.3 + (200-135)^2 \cdot 0.2 = 1525, \\ \mathbb{E}[B] &= 100 \cdot 0.6 + 150 \cdot 0.1 + 200 \cdot 0.3 = 135, \\ \mathbb{V}[B] &= (100-135)^2 \cdot 0.6 + (150-135)^2 \cdot 0.1 + (200-135)^2 \cdot 0.3 = 2025. \end{aligned}$$

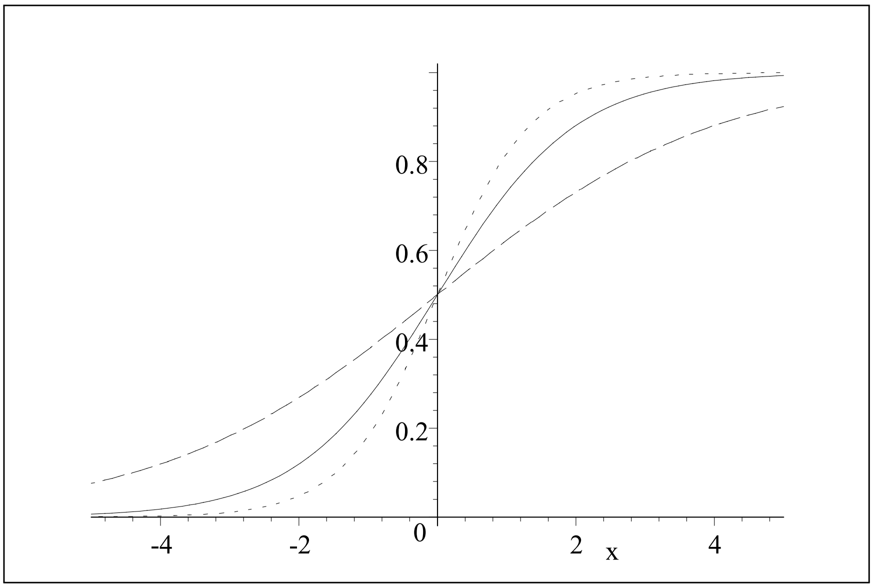
Questi risultati ci dicono che un soggetto con funzione di utilità concava è avverso alla volatilità.

I risultati appena mostrati si possono riassumere come nella Tabella 1.

N.B. 5 *Faccio notare al lettore che la relazione di dominanza stocastica (del primo o del secondo ordine) NON E' COMPLETA. Questo significa che NON VALE la proprietà per cui $A \succsim_{DS} B$ oppure $B \succsim_{DS} A$ (dove DS indica la dominanza stocastica).*

E' possibile definire livelli anche superiori di dominanza stocastica; tuttavia essi coincidono con ipotesi sempre più restrittive sulla forma della funzione di utilità.

Figura 4: Funzione di ripartizione logistica $\left(1+e^{-\beta x}\right)^{-1}$ (con $\beta = 1$ linea continua, $\beta = 1/2$ linea tratteggiata e $\beta = 3/2$ linea puntata).



1.3 Un esempio

Facciamo qui il caso di una funzione di ripartizione che abbia una forma logistica

$$\Pi(x) = \frac{\alpha}{\alpha + e^{-\beta x}},$$

definita su $\mathbb{R}$ e che ha la tipica forma ad S con due asintoti (per $x \to \infty$ si ottiene 1 mentre per $x \to -\infty$ si ottiene 0). I parametri α e β danno il punto di flesso della curva che è sempre crescente ma cambia concavità per

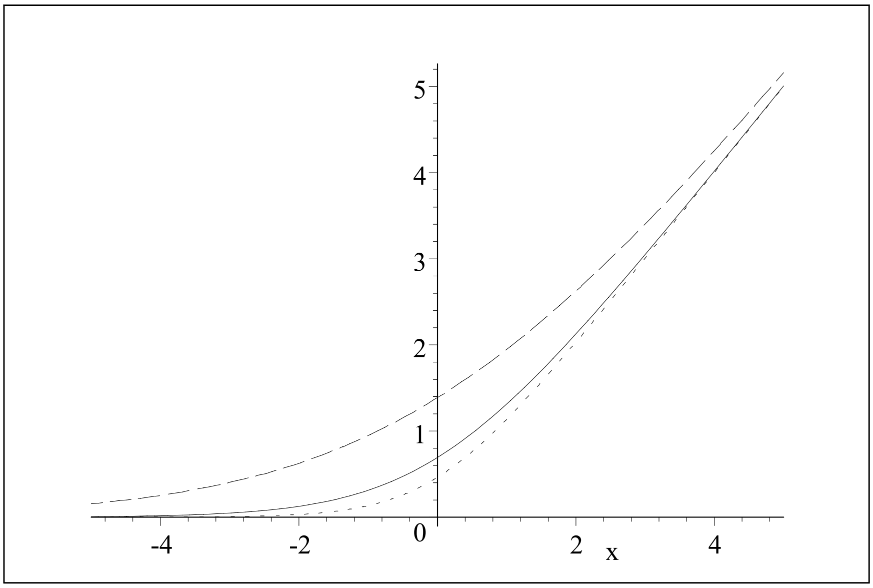
$$x = -\frac{1}{\beta} \ln \alpha.$$

Per semplicità si pone $\alpha = 1$ in modo che, per qualsiasi valore di β, il punto di flesso della logistica rimanga in $x = 0$. Cambiando i valori di β, dunque, si modifica la rapidità con cui la curva cresce. Si riportano tre casi (con tre valori di β) nei grafici della Figura 4.

Non esiste un valore di β per cui una curva di ripartizione sta sempre sotto le altre. Dobbiamo dunque porci il problema di come mettere in ordine queste curve.

Per applicare la dominanza stocastica del secondo ordine dobbiamo ulterior-

Figura 5: Dominanza stocastica del secondo ordine su funzione di ripartizione $\left(1+e^{-\beta x}\right)^{-1}$ (con $\beta = 1$ linea continua, $\beta = 1/2$ linea tratteggiata e $\beta = 3/2$ linea putata).



mente integrare la funzione di ripartizione da cui otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+e^{-\beta z}} dz = \left[\frac{1}{\beta} \ln\left(1+e^{\beta z}\right)\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\beta} \ln\left(1+e^{\beta x}\right).$$

Nella Figura 5 si visualizza l'andamento di questa funzione per diversi valori del parametro β.

Dal grafico appare che tanto maggiore è β tanto preferibile è la distribuzione. Vediamo di ottenere la stessa conclusione algebricamente. Dobbiamo cercare di mostrare che la derivata

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\beta} \ln\left(1+e^{\beta x}\right)\right),$$

è minore di zero. Un semplice calcolo ci permette di scrivere tale condizione come

$$-\frac{1}{\beta^2} \ln\left(1+e^{x\beta}\right) + \frac{1}{\beta} \frac{x e^{x\beta}}{1+e^{x\beta}} < 0,$$

la quale si semplifica come segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\frac{xe^{x\beta}}{1+e^{x\beta}} &< \frac{1}{\beta^2}\ln\left(1+e^{x\beta}\right),\\
\beta xe^{x\beta} &< \left(1+e^{x\beta}\right)\ln\left(1+e^{x\beta}\right),\\
e^{\beta xe^{x\beta}} &< \left(1+e^{x\beta}\right)^{\left(1+e^{x\beta}\right)},\\
\left(e^{\beta x}\right)^{e^{x\beta}} &< \left(1+e^{x\beta}\right)^{\left(1+e^{x\beta}\right)},
\end{aligned}$$

la quale è evidentemente sempre vera visto che una potenza che ha sia base sia esponente più grandi di un'altra potenza è anche più grande di essa.